

NGUYỄN DUY TIẾN - VŨ VIẾT YÊN

Lý thuyết XÁC SUẤT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

6
NGUYỄN DUY TIẾN - VŨ VIẾT YÊN



LÝ THUYẾT XÁC SUẤT

(Tái bản lần thứ nhất)



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Xác suất là một bộ phận của toán học nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên. Nói một cách đại khái thì hiện tượng ngẫu nhiên là hiện tượng ta không thể nói trước nó xảy ra hay không xảy ra khi thực hiện một lần quan sát. Tuy nhiên, nếu tiến hành quan sát khá nhiều lần một hiện tượng ngẫu nhiên trong những hoàn cảnh như nhau, thì trong nhiều trường hợp ta có thể rút ra được những kết luận khoa học về hiện tượng này. Chẳng hạn, ta không thể nói trước một hạt giống có nảy mầm hay không khi gieo xuống đất canh tác, nhưng nếu gieo nhiều hạt thì ta có thể rút ra được chất lượng tốt hay xấu của hạt giống. Lý thuyết xác suất nhằm tìm ra những quy luật trong những hiện tượng “tương chừng” như không có quy luật.

Lý thuyết xác suất ra đời vào nửa cuối thế kỷ thứ 17 ở nước Pháp. Hai nhà toán học vĩ đại của nước Pháp là Blaise Pascal (1623-1662) và Pierre de Fermat (1601-1665) đã trao đổi thư từ với nhau để bàn về một số bài toán liên quan đến trò chơi may rủi. Những bài toán này và các phương pháp giải chúng có thể xem là những nghiên cứu đầu tiên của lý thuyết xác suất. Tuy nhiên, trước đó, ở Italia các nhà toán học Cardano (1501-1576), Pacioli (1445-1509), Tartaglia đã giải một số bài toán riêng lẻ trong trò chơi may rủi.

Những bài toán kiểu Pascal và Fermat ảnh hưởng và khích lệ các nhà toán học trẻ (thời bấy giờ) như Huygens, Bernoulli và De Moivre tiếp tục nghiên cứu xác suất. Đây là những người có công đầu tiên sáng tạo ra cơ sở toán học của lý thuyết xác suất. Có lẽ Cardano và Huygens (1629-1695) là những người đầu tiên viết sách về xác suất (sách của Cardano xuất bản năm 1663, tức là 100 năm sau khi ông viết xong tác phẩm này; sách của Huygens công bố năm 1657).

Lịch sử thực sự của lý thuyết xác suất bắt nguồn từ các công trình James Bernoulli (1654-1705). Ông là người phát minh ra **Luật Số Lớn**. Chính vì lý do đó, ngày nay Hội Xác Suất Thống Kê Thế Giới mang tên Bernoulli.

De Moivre (1667-1754) là tác giả của **Định Lý Giới Hạn Trung Tâm** (trường hợp đối xứng), một trong những thành tựu quan trọng nhất của xác suất.

Năm 1812, P. S. Laplace (1749-1827) công bố cuốn sách "Theorie Analytique des Probabilities" (Lý Thuyết Giải Tích của Xác Suất). Cuốn sách này được xem là một đóng góp rất to lớn của Laplace trong xác suất. Ông là tác giả của Định lý giới hạn trung tâm (trường hợp không đối xứng), và là người đầu tiên áp dụng lý thuyết xác suất vào các vấn đề liên quan tới sai số quan sát.

S. D. Poisson (1781-1840) và C. F. Gauss (1777-1855) là những học giả tiếp thêm sức mạnh cho xác suất ứng dụng. Poisson là tác giả của **Luật Biến Cố Hiếm** nổi tiếng; Gauss là tác giả của lý thuyết sai số và đặc biệt đã sáng tạo ra **Phương Pháp Bình Phương Tối Thiểu**.

P. L. Chebyshev (1821-1894), A. A. Markov (1856-1922), A. M. Liapunov (1857-1918), A. Ya. Khinchin là những nhà toán học người Nga có rất nhiều đóng góp cho sự phát triển của lý thuyết xác suất. Họ đã sử dụng các phương pháp moment, hàm đặc trưng để nhận được những định lý giới hạn quan trọng. Đặc biệt Markov là người đã đưa ra mô hình Markov; Khinchin là tác giả của **Luật Loga Lặp**.

Lý thuyết xác suất hiện đại đi theo hướng tiên đề hóa. Các nhà toán học có công lớn trong hướng này là Bernstein (1880-1968), von Mises (1883-1953), Borel (18871-1956), P. Levy. Tuy nhiên, phải chờ đến sự ra đời cuốn sách "Foundations of the Theory of Probability, 1933" của Kolmogorov, giới toán học mới công nhận

xác suất là một lĩnh vực toán học chặt chẽ. Hệ tiên đề về xác suất của Kolmogorov được hầu hết các nhà toán học thừa nhận.

Ngày nay lý thuyết xác suất là lĩnh vực toán học có cơ sở lý thuyết chặt chẽ và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực hoạt động khác nhau của con người từ âm nhạc tới vật lý, từ văn học tới thống kê xã hội, từ cơ học tới thị trường chứng khoán, từ dự báo thời tiết tới kinh tế, từ nông học tới y học.

Ở nước ta xác suất được dạy đầu tiên tại trường Đại Học Tổng Hợp Hà Nội từ những năm đầu 1960 thế kỷ 20, và ngày nay đã được giảng dạy tại hầu hết các trường đại học. Có lẽ cuốn sách xác suất nước ngoài đầu tiên được dịch ra tiếng Việt là: "The Theory of Probability" của Gnedenko, (do Nguyễn Bắc Văn, Hồ Quỳnh và Nguyễn Quý Mỹ dịch từ nguyên bản tiếng Nga). Đây là tài liệu quý, giúp người Việt học xác suất bằng tiếng Việt.

Trong hơn bốn mươi năm qua, số sách về xác suất thống kê ở nước ta đã được xuất bản khá nhiều. Đặc biệt là những năm gần đây (1990-2000) đã có nhiều tác giả viết sách xác suất thống kê dưới hình thức phổ biến đại trà những kết quả cơ bản nhất của xác suất và thống kê, nhưng thiếu cơ sở toán học chặt chẽ tới mức cần thiết. Mục đích chính của cuốn sách này là cung cấp cho độc giả những kiến thức toán học cơ bản nhất làm nền tảng cho xác suất thống kê. Vì thế cuốn sách này sẽ có ích cho các sinh viên và những ai muốn đi sâu nghiên cứu xác suất thống kê.

Nội dung cuốn sách này được viết theo hệ tiên đề Kolmogorov. Chúng tôi lấy các sách [1]- [22] làm tài liệu tham khảo.

Cuốn sách này có 10 chương.

Chương 1 trình bày vắn tắt các kết quả cơ bản nhất của xác suất cổ điển.

Chương 2 trình bày các khái niệm cơ bản của xác suất dựa trên lý thuyết độ đo và tích phân Lebesgue.

Chương 3 trình bày biến ngẫu nhiên và hàm phân phối, tính độc lập.

Chương 4 trình bày các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên như kỳ vọng, phương sai và các tính chất cơ bản nhất của chúng.

Chương 5 dành cho các khái niệm hội tụ của biến ngẫu nhiên: hội tụ theo xác suất, hội tụ hầu chắc chắn, hội tụ trung bình, hội tụ theo phân phối,...

Chương 6 trình bày giải tích Fourier: hàm đặc trưng, một trong những công cụ quan trọng của giải tích để nghiên cứu lý thuyết xác suất.

Chương 7 dành cho những định lý giới hạn của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập: luật số lớn, định lý giới hạn trung tâm.

Chương 8 nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi các biến ngẫu nhiên độc lập, luật mạnh số lớn là mục đích chính của chương này.

Trong xác suất cổ điển, khái niệm độc lập chiếm vị trí trung tâm. Như ta sẽ thấy, các kết quả quan trọng trong các chương 1-8 thường có mặt giả thiết độc lập. Trong hai chương 9-10 của tài liệu này khái niệm phụ thuộc theo nghĩa nào đó sẽ được xét tới.

Chương 9 dành cho lý thuyết martingale với thời gian rời rạc. Nội dung chính của chương 9 là Các bất đẳng thức; Các định lý hội tụ; Thời điểm dừng. Bất đẳng thức Doob và định lý Doob về sự hội tụ của martingale là mục đích chính của chương 9.

Chương 10 trình bày các định nghĩa cơ bản và nêu một số mô hình ứng dụng quan trọng của xích Markov. Trong chương này bạn cần đọc kỹ các khái niệm và nắm vững các kết quả như: tính Markov, xác suất chuyển, phương trình Chapman-Kolmogorov, phân phối dừng, định lý ergodic, phương pháp phân tích bước thứ nhất và ba bài toán liên quan.

Nội dung của cuốn sách này đã được các tác giả và các bạn đồng nghiệp giảng dạy trong nhiều năm ở trường ĐHTH và trường ĐHSP Hà Nội.

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp ở tổ bộ môn xác suất thống kê của hai trường đại học nói trên.

Chúng tôi bày tỏ lòng biết ơn đối với Nhà xuất bản Giáo dục và T.S Nguyễn Huy Doan, T.S Trần Phương Dung đã động viên chúng tôi viết tài liệu này. Đặc biệt ông Nguyễn Trọng Bá đã đóng góp cho chúng tôi nhiều ý kiến về nội dung của cuốn sách này.

Cảm ơn những người đã đọc bản thảo và cho những nhận xét quý báu.

Cảm ơn Nguyễn Thị Vân Hoà , Phạm Thị Hằng, Dư Đức Thắng đã cùng chúng tôi đánh máy bản thảo dưới dạng Tex.

Dù đã rất cố gắng, song chắc còn một số sai sót, chúng tôi rất mong nhận được các ý kiến đóng góp, phê bình của bạn đọc.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Lời nói đầu.....	3
------------------	---

Chương 1. Mô hình xác suất rời rạc

1.1 Không gian xác suất rời rạc	12
1.2 Định nghĩa cổ điển của xác suất.....	17
1.3 Xác suất điều kiện. Sự độc lập	23
1.4 Dãy các phép thử	28
1.5 Phân phối giới hạn	36
Bài tập	40

Chương 2. Không gian xác suất tổng quát

2.1 Hệ tiên đề	45
2.2 Không gian đo	52
2.3 Phần tử ngẫu nhiên	55
2.4 Tích các σ -đại số	58
2.5 Xây dựng không gian xác suất	59
Bài tập	70

Chương 3. Biến ngẫu nhiên và hàm phân phối

3.1 Biến ngẫu nhiên	73
3.2 Phần tử ngẫu nhiên	78
3.3 Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên	79
3.4 Phân phối của véc tơ ngẫu nhiên	85
3.5 Phân phối của hàm của biến ngẫu nhiên	89
3.6 Tính độc lập	91
3.7 Phân phối của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập.....	96
Bài tập	101

Chương 4. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

4.1 Kỳ vọng toán	104
4.2 Khái niệm hầu chắc chắn	112
4.3 Tính kỳ vọng	113
4.4 Một số ví dụ	115
4.5 Khả tích đều	116
4.6 Kỳ vọng của hàm của biến ngẫu nhiên	122
4.7 Không gian $\mathcal{L}^p$	124
4.8 Quan hệ với tính độc lập	129
4.9 Kỳ vọng của hàm của véc tơ ngẫu nhiên	133
4.10 Tích các độ đo	135
4.11 Kỳ vọng điều kiện	141
4.12 Xác suất điều kiện chính quy	150
Bài tập	152

Chương 5. Sự hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên và phân phối

5.1 Sự hội tụ của các biến ngẫu nhiên	158
5.2 Sự hội tụ của các phân phối	169
5.3 Compact tương đối	178
Bài tập	183

Chương 6. Hàm đặc trưng

6.1 Định nghĩa và các tính chất của hàm đặc trưng	187
6.2 Một số tính chất của hàm đặc trưng	189
6.3 Công thức ngược	193
6.4 Định lý về tính chất liên tục	196
6.5 Định lý Bochner	200
6.6 Một vài nhận xét về hàm đặc trưng của phân phối nhiều chiều	202

6.7 Phân phối chuẩn nhiều chiều	203
Bài tập	209

Chương 7. Các định lý giới hạn theo phân phối của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập

7.1 Một số bất đẳng thức	214
7.2 Định lý Poisson và tốc độ hội tụ.....	215
7.3 Luật số lớn với các biến ngẫu nhiên độc lập tùy ý	219
7.4 Định lý giới hạn trung tâm.....	221
7.5 Phân phối chia được vô hạn.....	233
7.6 Phân phối ổn định.....	236
Bài tập	241

Chương 8. Tổng các biến ngẫu nhiên độc lập và Luật số lớn

8.1 Sự hội tụ của chuỗi các biến ngẫu nhiên độc lập.....	246
8.2 Luật mạnh số lớn.....	256
Bài tập	266

Chương 9. Martingale với thời gian rời rạc

9.1 Khái niệm tương thích và dự báo được	274
9.2 Thời điểm Markov và thời điểm dừng.....	275
9.3 Martingale.....	281
9.4 Các bất đẳng thức cơ bản.....	301
9.5 Các định lý hội tụ.....	306
9.6 Martingale chính quy	310
9.7 Martingale bình phương khả tích.....	317
9.8 Luật số lớn	320
9.9 Hằng đẳng thức Wald.....	324
Bài tập	326

Chương 10. Xích Markov với thời gian rời rạc

10.1 Tính Markov.....	329
10.2 Xích Markov rời rạc và thuần nhất.....	333
10.3 Một số mô hình xích Markov.....	338
10.4 Xích Markov có hữu hạn trạng thái.....	344
10.5 Mô hình phân chia thị trường.....	356
10.6 Mô hình trò chơi hai đấu thủ.....	360
10.7 Phân tích bước thứ nhất.....	365
Bài tập	374
Bảng ký hiệu	390
Tài liệu tham khảo	393